



جبر خطی

نیم‌سال اول ۹۹

مدرس: دکتر حمیدرضا ربیعی

تمرین سبزی پنجم

تاریخ تحویل: ۲۵ آذر

۱. درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را با ذکر دلیل بررسی کنید.

- حاصل ضرب دو ماتریس مارکف لزوماً یک ماتریس مارکف خواهد بود.
- اگر شرط مثبت بودن درایه‌های یک ماتریس مارکف را به نامنفی بودن تغییر دهیم، این امکان وجود دارد که به بیش از یک حالت پایدار برسیم.
- یک ماتریس مارکف نمی‌تواند منفی معین باشد.
- معکوس یک ماتریس متقارن (در صورت وجود) ممکن است متقارن نباشد.
- هر ماتریسی که مقادیر ویژه حقیقی و بردارهای ویژه حقیقی دارد، متقارن است.
- یک ماتریس متقارن با دترمینان مثبت، ممکن است مثبت معین نباشد.

۲. فرض کنید $M_{n \times n}$ یک ماتریس معکوس‌پذیر با درایه‌های نامنفی باشد که جمع درایه‌های هر ستون آن برابر با ۱ است. چنین ماتریسی را یک ماتریس تصادفی می‌نامیم.

- نشان دهید جمع هر یک از ستون‌های ماتریس M^{-1} برابر با ۱ خواهد بود.
- توضیح دهید چرا معکوس یک ماتریس تصادفی، لزوماً ماتریس تصادفی نخواهد بود.
- نشان دهید اگر M ماتریس 2×2 با درایه‌های ناصفر باشد، معکوس آن هیچ‌گاه نمی‌تواند ماتریسی تصادفی باشد.
- اگر $n > 2$ باشد، آیا می‌توان ماتریسی به جز ماتریس همانی پیدا کرد که خود و معکوس آن تصادفی باشند؟ در صورت وجود یک مثال بزنید و در صورت عدم وجود، اثبات کنید.

۳. تنها با استفاده از مقادیر ویژه، پایداری معادله $Au = u'$ را به ازای A ‌های زیر تعیین کنید:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \bullet$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \bullet$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \bullet$$

۴. فرض کنید A و B متقارن هستند و $AB = BA$. ثابت کنید AB متقارن است. اگر $AB \neq BA$ ، آیا AB لزوماً متقارن است؟

۵. برای هرکدام از ماتریس‌های متقارن زیر، Q و A را بدست آورید.

$$X = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -6 & -7 \end{bmatrix} \bullet$$

$$Y = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \bullet$$

۶. به ازای چه مقادیری از a و b ، ماتریس‌های X و Y مثبت معین هستند؟ به طور کامل توضیح دهید.

$$X = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix} \bullet$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & b & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \bullet$$

۷. فرض کنید $C_{n \times n}$ یک ماتریس مثبت معین است.

- نشان دهید C^{-1} نیز مثبت معین است.
- اگر $Q_{n \times n}$ یک ماتریس متعامد دلخواه باشد، نشان دهید ماتریس QCQ^T مثبت معین است.
- اگر A یک ماتریس $n \times m$ باشد به گونه‌ای که $M = A^T C A$ مثبت معین نباشد، کوچک‌ترین مقدار ویژه‌ی ماتریس M چه مقداری خواهد داشت؟ توضیح دهید.

۸. ماتریس K چه ویژگی‌هایی داشته باشد تا $\langle x, y \rangle = x^T K y$ ویژگی‌های ضرب داخلی را داشته باشد؟